CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR — ANNEE 1987

PREMIERE EPREUVE A OPTION — MATHEMATIQUES

M - P

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9)

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

—==oOOo==—

On considère la matrice J_n de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels définie par :

$$J_n = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i+j \neq n+1 \end{cases}$$

soit :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme représenté par J_n dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

I 1°) Calculer J_n^2.

2°) Déterminer la nature de f, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres dont on donnera une base en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

3°) J_n est-elle diagonalisable ?

II Soit $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ MJ_n = J_nM \}$.

1°) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) On note $M = (m_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$.

Montrer que :

$$M \in \mathcal{C} \iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \quad m_{ij} = m_{n+1-i\ n+1-j}$$

3°) Soit g l'endomorphisme représenté par M dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que : $M \in \mathcal{C} \iff$ g laisse stable tout sous-espace propre de f

(Rappel : on dit que g laisse stable le sous-espace vectoriel E si $g(E) \subset E$).

4°) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$. (On distinguera les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$).

III On suppose dans cette partie : $n = 2p$

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$

où A, B, C et D sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que :

$$M \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} C = J_p B J_p \\ D = J_p A J_p \end{cases}$$

($J_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est définie de façon analogue à J_n).

2°) En considérant une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de J_n, montrer que :

$$M \in \mathcal{C} \iff M \text{ est semblable à } M' = \begin{pmatrix} A + J_pB & 0 \\ 0 & A - J_pB \end{pmatrix}$$

Déterminer une matrice Q <u>orthogonale</u> et indépendante de M telle que : $M' = {}^tQ\,M\,Q$

3°) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{C}$ est diagonalisable si et seulement si $A + J_pB$ et $A - J_pB$ sont diagonalisables.

4°) <u>Application</u> :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer si M est diagonalisable et donner le cas échéant une matrice diagonale semblable à M.

T.S.V.P.

ECOLES MILITAIRES:ECOLE de l'AIR
Options M et P-Math.option.1
page 183
1987

IV On suppose dans cette partie :

$$n = 2p + 1$$

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ telle que $M = \begin{pmatrix} A & x & C \\ y & q & z \\ B & t & D \end{pmatrix}$

où A, B, C et D sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

x et t sont des éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

y et z sont des éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$

$q \in \mathbb{R}$

1°) Montrer que :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} C = J_p B J_p \\ D = J_p A J_p \\ t = J_p x \\ z = y J_p \end{cases}$$

2°) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que :

$${}^tQ\, M\, Q = \begin{pmatrix} A + J_p B & \sqrt{2}\, x & 0 \\ \sqrt{2}\, y & q & 0 \\ 0 & 0 & A - J_p B \end{pmatrix}$$

quelle que soit la matrice M de $\mathcal{C}$.

3°) A quelle condition nécessaire et suffisante une matrice M de $\mathcal{C}$ est-elle diagonalisable ?

4°) Application :

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Dans le cas où elle l'est, donner une matrice diagonale semblable à M.

----==oOOo==----